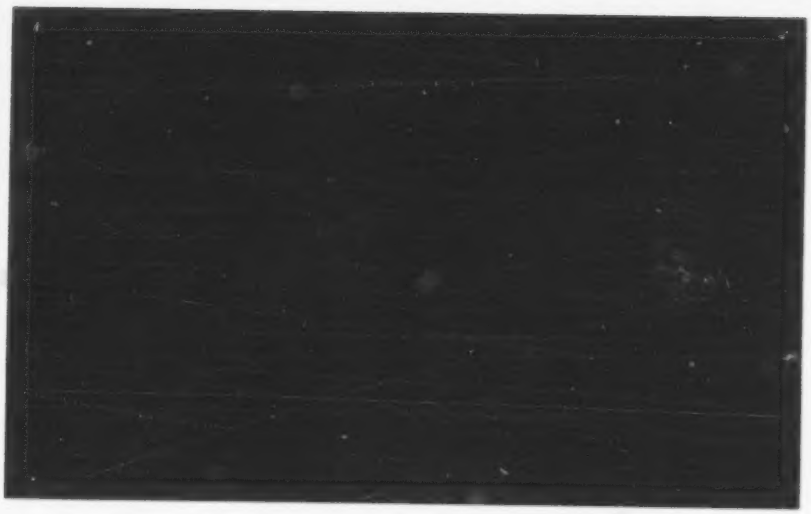
CENTRE DE RECHERCHE SUR LES TRANSPORTS
(C.R.T.)
CENTRE FOR RESEARCH ON TRANSPORTATION

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL
ÉCOLE DES HAUTES ÉTUDES COMMERCIALES
ÉCOLE POLYTECHNIQUE



CENTRE DE RECHERCHE SUR LES TRANSPORTS
UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL
C.P. 6128, SUCCURSALE A
MONTRÉAL
CANADA H3C 3J7

TÉLÉPHONE: (514) 343-7575
TÉLEX: 05-24146 BIBPOLYTEC
EMAIL: crt@crt.umontreal.ca
TÉLÉCOPIEUR (FAX): (514) 343-7121

Soumission invitée aux Annales d'Économie et de Statistiques.

CRT-709

FONCTIONS DE PRODUCTION ET BIAIS D'AGRÉGATION

par

Nicole M. Fortin*

* Département de Sciences économiques et Centre de recherche sur les transports, Université de Montréal, C.P. 6128, succursale A, Montréal, Québec, Canada H3C 3J7.

L'auteur tient à remercier Charles Blackorby, John Cragg, Erwin Diewert, Terence Gorman, William Schworm, Thomas Stoker et John Walsh pour leurs commentaires.

Cette recherche a bénéficié de l'aide financière du fonds Cafir no. 114-81 de l'Université de Montréal et du MESST, Québec.

Centre de recherche sur les transports - Publication #709

August 1990

Dépôt légal - 3e trimestre 1990

91-00428/

RÉSUMÉ. – Cet article étudie l'agrégation des fonctions de production dans un cadre conceptuel stochastique où les facteurs de production et les paramètres technologiques sont tous deux distribués de façon probabiliste au niveau des firmes. La fonction de production agrégée "vraie" correspondante, exprimée en termes de moments de cette distribution conjointe, est comparée à une fonction macroéconomique donnée. Cette comparaison implique un biais d'agrégation au niveau de l'output global, si la fonction macroéconomique est complètement spécifiée, ou permet d'établir la relation entre les paramètres macroéconomiques d'agrégation exacte et leurs microfondements, si elle ne l'est pas.

Mots-clés: Agrégation des fonctions de production, biais d'agrégation.

ABSTRACT. – This paper considers the aggregation of production functions within a stochastic framework where both the technological parameters and the factor inputs are thought to be probabilistically distributed across firms. The corresponding "true" aggregate production function expressed in moments form is compared with the macro function of choice. This comparison either yields an aggregation bias in total output, if the macro function is fully specified, or allows the relation between exact-aggregation macro parameters and their microfoundations to be established, if not.

Keywords: Aggregation of production functions, aggregation bias.

1 Introduction

Cet article présente un cadre conceptuel permettant d'analyser et d'évaluer les biais d'agrégation. Ces biais mesurent l'information qui est omise lorsque les relations macroéconomiques, définies en termes d'agrégats généraux, ne réunissent pas toutes les propriétés distributionnelles des relations microéconomiques. Le modèle est développé dans le cadre de la théorie du producteur; cependant il peut servir à déterminer les biais émergeant de tout modèle de type agent représentatif ainsi qu'à étudier la correspondance entre les paramètres macroéconomiques d'agrégation exacte et leurs microfondements. Il s'applique aux séries temporelles retraçant le comportement d'agents ou d'unités microéconomiques au niveau désagrégé (ici, les secteurs industriels), qui décrivent exhaustivement l'unité d'agrégation macroéconomique (ici, l'économie nationale).

Le modèle et les résultats qui en découlent sont présentés dans le deuxième paragraphe. Le modèle proposé est basé sur une interprétation stochastique des caractéristiques de production d'une population de firmes. Cette interprétation englobe celle des modèles stochastiques d'agrégation antérieurs tout en s'en démarquant de façon significative. [2] Ces modèles considéraient comme stochastiques ou bien les paramètres technologiques (Houthakker, 1955, Johansen, 1972, Sato, 1975, Hildenbrand, 1981), ou bien les variables explicatives (Stoker, 1984, Lewbel, 1986, 1988). [3]

Ici, les paramètres technologiques et les facteurs de production décrivent exhaustive-

[2] Ici, un modèle est dit stochastique lorsqu'il considère les choix des agents comme étant des réalisations de variables aléatoires, terminologie à distinguer de celle de Malinvaud (1956) qui appelle, modèles stochastiques, les modèles dont les liaisons sont stochastiques plutôt que fonctionnelles.

[3] Hénocq et Kempf (1984) emploient aussi des variables et des paramètres aléatoires; cependant ils s'intéressent plutôt à l'agrégation quasi-parfaite.

ment les caractéristiques de production, prenant des valeurs différentes pour chacune des firmes; on suppose qu'ils appartiennent à une distribution de probabilité conjointe. Donc, même si théoriquement une seule forme fonctionnelle est utilisée pour décrire les relations individuelles, il y aura effectivement des différences dans les formes fonctionnelles individuelles; lorsque les firmes choisiront des technologies différentes, certains paramètres pourront prendre des valeurs limites ou nulles. Cette méthodologie se distingue de celle des modèles de type agent représentatif (Stoker, 1984, Lewbel, 1988) sans toutefois les exclure. Elle permet de définir des relations agrégées exhaustives ("vraies") qui pourront ensuite être comparées aux relations macroéconomiques de référence.

Les modèles stochastiques d'agrégation basés sur des distributions paramétriques générales (Stoker, 1984, 1986, Lewbel, 1986) se doivent d'imposer des restrictions particulières sur ces représentations paramétriques afin de pouvoir comparer la relation agrégée "vraie" à la relation macroéconomique. Ici, on évite de recourir à des restrictions non triviales qui ne sont pas susceptibles d'être vérifiées empiriquement. On utilise plutôt une décomposition de la relation agrégée "vraie" en termes des moments de la distribution des caractéristiques. Cette décomposition ne peut être dérivée de façon complète que pour les polynômes. Cependant les décompositions en termes de fonctions des caractéristiques sont aussi utiles car elles permettent d'identifier les sources potentielles de biais d'agrégation. L'approche proposée est donc indépendante du type de distribution à laquelle elle s'applique, par constraste avec les autres modèles stochastiques. Les changements dans la taille de la population entraîneront des changements dans les moments de la distribution des caractéristiques de production; implicitement ils sont donc pris en compte dans ce modèle.

L'équation de l'agrégation exacte pourra alors être formulée en termes de la relation agrégée exhaustive. Lorsque cette équation ne sera pas satisfaite, un biais d'agrégation en résultera,

- soit au niveau de l'output si la relation macroéconomique est complètement spécifiée,

- soit au niveau des paramètres si elle ne l'est pas.

Les biais au niveau de l'output sont intersectoriels, alors que les biais au niveau des paramètres sont intertemporels. [4] Par exemple, on définit le biais d'agrégation de l'output global comme étant la différence entre le niveau d'output résultant d'une relation macroéconomique donnée et celui qui découle de l'agrégation exhaustive des relations microéconomiques. Dans cet article, on ne traite que de l'agrégation des produits en dehors de l'équilibre (le point de vue de Klein, 1946); on peut considérer qu'il s'agit là d'une illustration de l'agrégation de relations économiques arbitraires. L'agrégation des produits en présence de comportements optimaux s'étudie plus facilement en agrégeant les fonctions optimisées, nommément les fonctions de profits. Elle est traitée de façon similaire en incluant les prix parmi les variables aléatoires (entre agents); la concurrence devient un cas particulier où tous les agents font face aux mêmes prix. [5]

L'étude d'un cas particulier d'une fonction macroéconomique complètement spécifiée est ensuite présentée; c'est celui de l'agent représentatif moyen dont les paramètres sont définis comme les moyennes des paramètres microéconomiques. On cherche à établir s'il existe une firme dont la technologie représentera la macrotechnologie mais sera définie à partir de celles de firmes non identiques. Le biais d'agrégation de la firme moyenne est dérivé explicitement, de façon exacte pour les polynômes et de façon approximative pour les autres formes fonctionnelles.

Lorsque la fonction macroéconomique n'est pas spécifiée complètement, par exemple, lorsque ses paramètres sont estimés plutôt que dérivés des caractéristiques microéconomiques, l'équation de l'agrégation exacte définit implicitement, à chaque période, la correspondance entre les paramètres macroéconomiques d'agrégation exac-

[4] Theil (1954, p.122ff.; 1971, p.560) a aussi défini des biais d'agrégation statistiques dans les paramètres macroéconomiques dans le cadre de l'agrégation linéaire; ceux-ci furent discutés par Allen (1959, p.700), Gupta (1971), VanDaal (1980), VanDaal et Merkies (1984, p.184ff.).

[5] Voir Fortin, 1988, 1989a.

te et leurs microfondements sous la forme d'une variété de biais nul. Cette expression généralise, au cas non linéaire, les résultats de Theil (1954) qui relient des caractéristiques microéconomiques non correspondantes aux paramètres macroéconomiques; elle implique que les paramètres macroéconomiques d'agrégation exacte ne possèderont des microfondements stables dans le temps que si certaines conditions sont satisfaites. Ces conditions sont dérivées de façon explicite pour les formes fonctionnelles dont les propriétés d'homogénéité sont connues; elles expliquent les résultats des simulations de Fisher (1971) qui a étudié la précision empirique de la fonction de production Cobb-Douglas au niveau macroéconomique. Lorsque ces conditions ne sont pas satisfaites, les paramètres macroéconomiques d'agrégation exacte seront instables s'ils doivent conserver les mêmes microdéfinitions dans le temps.

L'application du cadre conceptuel proposé à l'agrégation linéaire en démontre la puissance et la simplicité. Plusieurs résultats statistiques d'agrégation établis par Theil (1954, 1971) et Zellner (1969) peuvent maintenant être obtenus facilement et étendus au niveau de la population. La description de la surface d'agrégation exacte illustre clairement comment les caractéristiques non correspondantes se retrouvent dans les microdéfinitions des paramètres macroéconomiques d'agrégation exacte. L'agrégation "parfaite" est formalisée en tant que solution qui requiert des agrégats définis en termes de moments d'ordre supérieur généralement non disponibles.

Le troisième paragraphe présente des analyses empiriques qui confirment que l'ordre de grandeur des biais d'agrégation augmentent lorsque les moments d'ordre supérieur de la production agrégée "vraie" augmentent en importance. Dans le cas linéaire, on constate qu'il existe une firme moyenne générant un biais d'agrégation négligeable. Ces analyses empiriques cherchent aussi à établir dans quelles circonstances l'instabilité des paramètres macroéconomiques d'agrégation exacte est importante. Le quatrième paragraphe conclut en soulignant les avantages de la méthodologie suggérée.

2 Cadre conceptuel et implications théoriques

2.1. Définition et décomposition des agrégats exhaustifs

On considère une économie (ou une industrie) composée d'un nombre fini F de firmes, dont les technologies de production sont décrites de façon déterministe à l'aide d'une fonction spécifique à chacune des firmes, $y_t^f = g_t^f(x_t^f)$ $(f = 1, 2, \ldots, F,$ $t = 1, 2, \ldots, T)$, où y_t^f dénote le niveau d'output et x_t^f est un N-vecteur d'inputs. On suppose que toutes les fonctions microéconomiques appartiennent à une même classe fonctionnelle générale, dont la paramétrisation est finie. Ainsi, il est possible de représenter toutes les technologies à l'aide d'une seule forme fonctionnelle en incluant les paramètres technologiques parmi les arguments de la fonction, $y_t^f = g(x_t^f, \theta_t^f)$ $\equiv g(z_t^f)$ où $z_t^f = (x_t^f, \theta_t^f) \in \mathbb{R}^{N+S}$ sont les caractéristiques de production et g est appelée la fonction de production augmentée. Le modèle le plus général admet des paramètres pouvant varier dans le temps; cependant on se restreindra le plus souvent au cas où ceux-ci ne varient pas. Pour alléger la notation, les indices temporels sont maintenant supprimés; ils seront réintroduits à la section 2.4.

Les caractéristiques de production $(z^1, \ldots, z^F) \in \mathbb{R}^F \times \mathbb{R}^{N+S}$ peuvent être interprétées comme les réalisations d'un vecteur aléatoire $Z \in \mathbb{R}^{N+S}$ dont la densité $\phi_Z(z)$ est une densité conjointe de facteurs de production et de paramètres technologiques. Contrairement à l'usage courant, cette densité n'est pas paramétrisée *a priori* et il ne sera pas nécessaire de l'estimer (de façon paramétrique ou non). [6] Cependant, on doit

[6] Voir, entre autres, Tapia et Thompson (1978), Rao (1983), et Silverman (1986) sur l'estimation non paramétrique des fonctions de densité.

faire l'hypothèse qu'un certain nombre de moments, déterminés par la forme fonctionnelle de g, existent.

Le premier moment, ou moyenne, est défini par $\mu_z \equiv \mathbf{E}(Z) \equiv \int_{\Omega_z} z\ \phi_Z(z)\,dz$, où l'intégrale d'un vecteur est définie comme un vecteur d'intégrales et où Ω_z est le domaine de définition de Z. Les agrégats des caractéristiques microéconomiques qui interviendront dans la fonction macroéconomique sont aussi définis en termes de fonctions de la distribution de Z; ils sont dénotés par $\psi_z(Z)$. Les agrégats d'output exhaustifs ("vrais"), qui englobent toutes les propriétés distributionnelles des relations microéconomiques, sont définis de façon similaire, en termes de totaux:

$$\mathcal{Y} \equiv F \cdot \mathbf{E}[g(Z)] \equiv F \cdot \int_{\Omega_z} g(z)\ \phi_Z(z)\,dz, \tag{1}$$

où g: $\mathbb{R}^{N+S} \rightarrow \mathbb{R}$, de telle sorte que $\mathcal{Y} \in \mathbb{R}$, si l'intégrale est bien définie; ou, en termes de moyennes: $\mu_y \equiv \frac{\mathcal{Y}}{F} \equiv \mathbf{E}(Y) \in \mathbb{R}$ où Y est une variable aléatoire dont les réalisations sont $(y^1, \ldots, y^F)$. En termes des valeurs observées, il s'agit des statistiques usuelles, les totaux et les moyennes, qu'on retrouve dans les modèles non stochastiques d'agrégation exacte (par exemple, Fisher, 1965, 1969, 1982). [7]

Les modèles d'agrégation stochastiques ont traditionnellement cherché à résoudre des expressions similaires à celle de l'output espéré (1) pour certaines distributions et certaines formes fonctionnelles spécifiques. Dans le modèle Houthakker-Johansen-Sato, si la densité de l'output maximum suit une distribution de Pareto et si les facteurs de production sont utilisés dans des proportions fixes (ou variables), alors la fonction de production agrégée "vraie" sera une Cobb-Douglas (ou une CES). Les modèles plus récents (Stoker, 1984 et Lewbel, 1986, 1988) supposent que la distribution des caractéristiques de production peut être paramétrisée complètement en termes des moyennes. Dans Stoker (1986), la paramétrisation est telle qu'il existe une transformation inverse entre les paramètres de la distribution et la moyenne des variables. [8]

[7] À noter que cette approche présume que les produits ne sont pas diff'erenciés (homogènes). Lorsqu'on agrège une économie, les dollars constants peuvent servir d'unité de mesure commune non différenciée.

[8] Soit un δ qui paramétrise la densité $\phi_Z(z) \equiv \phi_Z(z|\delta)$, et soit $\mu_z = \mathbf{E}(Z|\delta) = H(\delta)$, la paramétrisation

Nous verrons plus loin que les biais d'agrégation ne sont présents que lorsque les moyennes des caractéristiques ne fournissent pas une information exhaustive sur les relations microéconomiques (ou leur représentation paramétrique), i.e. lorsque la tranformation inverse n'existe pas. La méthodologie de Stoker et Lewbel transpose le problème d'agrégation dans l'espace des paramètres de la distribution des caractéristiques et le résoud à l'aide d'hypothèses distributionnelles non triviales, qui souvent ne sont valides que pour certaines relations microéconomiques précises. [9]

Ici, la distribution des caractéristiques n'est pas décrite de façon paramétrique; plutôt, l'expression (1) est décomposée en termes de moments de cette distribution. Dans la recherche des conditions d'agrégation exacte, cette approche en termes de moments offre plus de choix pour imposer des restrictions que les modèles non stochastiques d'agrégation exacte et s'applique à un plus grand nombre de formes fonctionnelles que les approches stochastiques décrites ci-haut.

Si la fonction de production augmentée $g(z^f)$ est un polynôme, il est possible d'exprimer son espérance $\mathbf{E}[g(Z)]$ en termes de moments de la distribution des caractéristiques. Les premiers moments sont aussi utilisés pour définir les agrégats des caractéristiques. Les moments centraux mesurent l'interdépendance entre les caractéristiques et pourraient être assimilés à une mesure de séparabilité au niveau de la population. Par exemple, si les caractéristiques sont distribuées indépendamment, leurs covariances s'annulent.

Supposons pour simplifier que le vecteur aléatoire $Z \in \mathbb{R}^3$, et que $g(Z)$ est 3-

complète en termes des moyennes (*mean full dimensionality*) suppose qu'il existe un δ tel que $H(\delta) \in \mathbb{R}^{N+S}$. De plus, Stoker (1986, p.174) suppose que la transformation $\delta = H^{-1}(\mu_z)$ existe, ce qui implique que $\mu_y = \int g(z)\phi_Z(z|\delta)\,dz = G^*(\delta) = \tilde{G}(H^{-1}(\mu_z)) = G(\mu_z)$. Cette égalité est équivalente (et même plus forte) que l'équation définissant l'agrégation exacte, à moins que le vecteur z ne comprenne des produits, des puissances ou des produits croisés des variables.

[9] Lewbel (1986) agrège de façon exacte des relations microéconomiques log-log en une relation macroéconomique log-log en supposant que la distribution de la variable explicative est proportionnelle à la moyenne (*mean scaled*), i.e. homogène de degree 0 en z et μ_z. Malinvaud (1981) parle de distribution stable à un paramètre d'échelle près. Cependant, dans plusieurs cas où les données distributionnelles existent (comme le revenu personnel et les ventes manufacturières), Lewbel a constaté que cette hypothèse n'est pas vérifiée empiriquement.

linéaire, $g(Z) = \sum_{i_1,i_2,i_3=0}^{1} (Z_1)^{i_1}(Z_2)^{i_2}(Z_3)^{i_3}$, où certaines composantes de Z sont des paramètres, alors [10]

$$(2) \qquad \mathbf{E}[g(Z)] = \sum_{i_1,i_2,i_3=0}^{1} \mathbf{E}[(Z_1)^{i_1}(Z_2)^{i_2}(Z_3)^{i_3}] = \sum_{i_1,i_2,i_3=0}^{1} \mu_{i_1 i_2 i_3},$$

où $\mathbf{E}[(Z_1)^{i_1}(Z_2)^{i_2}(Z_3)^{i_3}] \equiv \mu_{i_1 i_2 i_3}$ est le moment d'ordre $\eta = i_1+i_2+i_3$ du vecteur aléatoire (Z_1, Z_2, Z_3). De même, les moments centraux sont dénotés par $m_{i_1 i_2 i_3} \equiv \mathbf{E}[(Z_1 - \mu_{100})^{i_1}\ (Z_2 - \mu_{010})^{i_2}\ (Z_3 - \mu_{001})^{i_3}]$. On peut toujours écrire $\mathbf{E}[Z_1 Z_2 Z_3] \equiv \mu_{111} = \mathbf{E}(Z_1)\mathbf{E}(Z_2)\mathbf{E}(Z_3) + \mathbf{E}(Z_1)m_{011} + \mathbf{E}(Z_2)m_{101} + \mathbf{E}(Z_3)m_{110} + m_{111}$. Soit $e_k = (0, 1_k, 0)$, $k = 1, 2, 3$, la base canonique de $\mathbb{R}^3$; remplaçons $\mu_{i_1 i_2 i_3}$ par $\mu[i_1, i_2, i_3]$, alors tout moment ($\eta \leq 3$) de $Z \in \mathbb{R}^3$ peut s'exprimer comme:

$$(3) \quad \mu[i_1, i_2, i_3] \equiv \mu[\sum_{k=1}^{3} i_k e_k] = \prod_{k=1}^{3} \mu[i_k e_k] + \sum_{j_1,j_2,j_3=0}^{1} m[\sum_{k=1}^{3} j_k e_k]\ \mu[\sum_{k=1}^{3} (i_k - j_k)e_k],$$

où $\mu[0,0,0] = 1$, $\mu[\sum_{k=1}^{3} j_k e_k] = 0$ si $\sum_{k=1}^{3} j_k e_k < 0_3$ et $m[\sum_{k=1}^{3} j_k e_k] = 0$ si $\sum_{k=1}^{3} j_k e_k \leq 1_3$.

L'espérance de $g(Z)$ devient

$$(4) \qquad \begin{aligned} \mathbf{E}[g(Z)] &= g[\mathbf{E}(Z)] + \sum_{i_1,i_2,i_3=0}^{1} \Big(\sum_{j_1,j_2,j_3=0}^{1} m[\sum_{k=1}^{3} j_k e_k]\ \mu[\sum_{k=1}^{3} (i_k - j_k)e_k] \Big) \\ &= g[\mathbf{E}(Z)] + \mathbf{M}[g(Z)]. \end{aligned}$$

Les termes de droite, à l'exclusion de $g[\mathbf{E}(Z)]$, correspondent à la somme des moments d'ordre supérieur de l'output espéré, qui est dénotée $\mathbf{M}[g(Z)]$. [11]

La décomposition (4) se généralise à toute fonction k-linéaire et peut être étendue à tout polynôme en écrivant les puissances n-ièmes des variables comme un n-produit. Elle peut aussi être appliquée aux développements en séries tronqués. Malgré ces limitations, cette approche est avantageuse car les décompositions en termes de produits de fonctions sont souvent utilisées en théorie de l'agrégation (Gorman, 1968, Blackorby et Schworm, 1984, 1988).

[10] Une fonction $g(z)$, $g: IR^N \rightarrow IR$ est dite n-linéaire lorsqu'elle comprend des termes où l'ordre de chacune des composantes de z est au plus égal à 1.

[11] À noter que malgré la similitude apparente de l'expression (4) avec l'inégalité de Jensen (1906) se rapportant aux fonctions convexes, cette dernière ne peut s'appliquer ici. La concavité usuelle de la fonction de production en termes d'inputs ne s'applique qu'aux N premiers arguments de g, – les facteurs de production –, mais ne s'étend pas aux S suivants, – les paramètres technologiques.

2.2. Équation de l'agrégation exacte et biais résultants

La plupart des modèles d'agrégation exacte cherchent à établir les conditions sous lesquelles la fonction de production de niveau macroéconomique G, définie comme une fonction d'agrégats de variables microéconomiques, donnera le niveau d'output agrégé "vrai":

$$\mathcal{Y} \equiv F \cdot \mu_y = G(\psi_z(Z)), \tag{5}$$

où $\psi_z(Z) \in \mathbb{R}^{N+S}$ représente les agrégats des caractéristiques et $G: \mathbb{R}^{N+S} \rightarrow \mathbb{R}$. [12] Cette équation définit l'agrégation exacte (voir aussi Denizot et Lévy-Garboua, 1972, Pokropp, 1978).

Si la fonction macroéconomique G est connue *a priori*, alors l'équation de l'agrégation exacte (5) sert à établir la correspondance entre la relation macroéconomique et ses microfondements. Si la fonction G est inconnue, on suppose que la forme fonctionnelle de la fonction macroéconomique augmentée est la même que celle des fonctions microéconomiques augmentées. [13] Cette hypothèse est plus générale que l'approche de modélisation macroéconomique de type agent représentatif, puisque les paramètres individuels se différencient entre eux et de ceux du niveau macroéconomique.

Si l'équation de l'agrégation exacte (5) n'est pas satisfaite, le biais d'agrégation de l'output peut être défini par

$$B_{\mathcal{Y}} = F \cdot \int_{\Omega_z} g(z)\ \phi_Z(z)\, dz - G(\psi_z(Z)). \tag{6}$$

Si la fonction macroéconomique G et les agrégats des caractéristiques $\psi_z(Z)$ étaient connus, le biais d'agrégation pourrait être évalué directement en utilisant $\mathcal{Y} \equiv F\ \mathbf{E}(Y)$.

[12] Certains modèles utilisent un critère d'agrégation différent. Par exemple, VanDaal et Meerkies (1984, chap. 2), Blackorby, Schworm et Fisher (1986, sections 3-4) cherchent à établir les conditions sous lesquelles la frontière de production de l'économie peut s'écrire en termes d'agrégats d'inputs, sans nécessairement se préoccuper de l'agrégation de l'output.

[13] Chaque microtechnologie, qui est représentée par une fonction de production augmentée g, peut être vue comme étant un tirage particulier d'une population de paramètres technologiques. Cette hypothèse suppose simplement que le choix de macrotechnologie serait un autre tirage et n'est pas restrictive.

Plus généralement, il peut être utile de considérer une décomposition du biais d'agrégation sous forme de moments. [14] Ainsi, les conditions de séparabilité des modèles d'agrégation exacte (Nataf, 1948, 1967) peuvent être réexaminées. Ces conditions éliminent les termes de covariance entre les facteurs de production et réduisent la valeur du biais d'agrégation. Cependant, comme les conditio s de séparabilité n'impliquent pas l'élimination des variances et des moments d'ordre supérieur ($\eta \geq 3$), elles ne garantissent pas que le biais d'agrégation disparaîtra et ne peuvent être vues comme suffisantes. [15] De plus, les conditions de séparabilité ne peuvent plus être considérées comme nécessaires puisque la somme des termes de covariances entre facteurs de production peuvent s'annuler dans nombre de circonstances; ces conditions peuvent maintenant être remplacées par des conditions plus générales qui requièrent l'annulation de la somme des covariances impliquées au niveau de la population, sans imposer de restrictions sur les formes fonctionnelles individuelles.

2.3. Le cas de la firme représentative moyenne

Comme exemple d'une fonction macroéconomique complètement spécifiée, on considère maintenant un problème d'agent représentatif. On cherche à déterminer s'il existe un agent représentatif dont le comportement peut être dérivé de celui d'agents non identiques. La technologie de la firme représentative moyenne, qui est aussi la macrotechnologie, est perçue comme étant la moyenne de toutes les technologies: $G \equiv g$ et $\psi_z(Z) = (\mu_x, \mu_\theta)$. C'est un cas particulier où les paramètres macroéconomiques ne dépendent que des paramètres microéconomiques et ne varient pas dans le temps si ces derniers ne varient pas. Il correspond d'une certaine manière au concept marshallien de la firme représentative (Marshall, 1920, p.318).

[14] Tel qu'illustré dans l'application à l'agrégation linéaire, plus bas.

[15] De fait, Nataf (1948) devait aussi imposer des conditions sur la construction des agrégats, ces derniers pouvant être des fonctions de variables microéconomiques. Cependant, de telles conditions peuvent aussi être remises en cause étant donné que de telles données ne sont généralement pas disponibles.

L'équation de l'agrégation exacte et le biais résultant peuvent alors s'écrire en termes de moyennes: $\mu_y = g(\mu_z)$ ce qui implique $B_{\mu y} = \mu_y - g(\mu_z)$. Aussi, ne sera-t-il possible de trouver une firme répresentative moyenne dont les microfondements sont exacts que si l'output agrégé exhaustif ne comprend que des moments du premier ordre.

PROPRIÉTÉ 1: Le biais d'agrégation de la firme représentative moyenne sera nul si et seulement si la somme des moments d'ordre supérieur ($\eta > 1$) de la distribution des caractéristiques dans $B_{\mu y}$ s'annule.

Preuve: Elle découle de la décomposition en termes de moments (sous sa forme exacte ou approximée en séries) du biais d'agrégation de l'output moyen. Voir l'annexe.

Cette condition peut être plus ou moins restrictive que celle imposant la linéarité des relations microéconomiques. En effet, une fonction linéaire au niveau des facteurs de production x^f peut admettre des termes du type $\alpha_i^f x_i^f$; la linéarité des fonctions ne garantit donc pas que la somme des termes de covariance disparaîtra. D'autre part, l'élimination de la somme des moments d'ordre supérieur peut résulter de propriétés de la distribution de Z, ce qui légitimiserait alors l'emploi de fonctions de production non linéaires.

Si g est un polynôme, ce qui implique que les fonctions de production non augmentées sont aussi des polynômes, le biais d'agrégation de l'output moyen est donné par la somme des moments d'ordre supérieur: $B_{\mu y} = \mathrm{M}[g(Z)]$. [16] Lorsque g possède une autre forme fonctionnelle continûment différentiable, Keller (1980) a suggéré d'utiliser une approximation dérivée du développement en séries de Taylor: $B_{\mu y} \approx \frac{1}{2}\mathrm{tr}(\bar{H}C)$, où tr représente la trace d'une matrice, $\bar{H}$ est la matrice hessienne évaluée à μ_z et C la matrice de variance-covariance. [17]

[16] Il sera préférable de se restreindre aux polynômes où les paramètres θ^f apparaissent avec ordre au plus 1 pour simplifier les problèmes d'identification.

[17] Étant donné l'asymétrie présumée de la distribution des firmes dans une économie, une meilleure approximation inclurait les termes d'ordre trois.

2.4. Microfondements des paramètres macroéconomiques d'agrégation exacte

Contrairement à l'approche complètement spécifiée de la firme représentative moyenne, les modèles d'agrégation exacte ne précisent généralement que les agrégats d'inputs sans spécifier la nature des paramètres macroéconomiques. [18] Dans ce cas, l'équation de l'agrégation exacte définira une S-variété de biais nul, décrite par l'équation

$$G(\mathcal{X}, \theta^M) - \mathcal{Y} = 0, \tag{7}$$

à laquelle les paramètres macroéconomiques d'agrégation exacte θ^M devront appartenir. Comme Richmond (1976) l'a souligné dans un contexte un peu différent, le problème de l'agrégation peut être compris comme un problème d'identification. Il faut donc imposer des restrictions supplémentaires sur cette variété afin d'en extraire un vecteur précis. Par exemple, on peut exiger que les paramètres macroéconomiques soient constants dans le temps. Il s'agit d'une restriction quelque peu *ad hoc*; cependant elle est suffisamment courante pour en justifier l'examen. [19]

Réintroduisons maintenant les indices temporels et examinons la stabilité temporelle des paramètres macroéconomiques d'agrégation exacte. Si on suppose que les inputs agrégés (les variables macroéconomiques) sont évalués au moyen de sommes d'inputs microéconomiques, on peut réécrire l'équation représentant la S-variété de biais nul comme:

$$G(F_t \cdot \mu_x(t), \theta^M) - F_t \cdot \mu_y(t) = 0. \tag{8}$$

Si on suppose que G est continûment différentiable et que la matrice $\partial[G(F_t \cdot \mu_x(t), \theta^M) - F_t \cdot \mu_y(t)] / \partial(F_t \cdot \mu_x(t), F_t \cdot \mu_y(t))$ est non singulière, alors par le théorème des

[18] Par exemple, on suppose souvent qu'ils se ramènent à $\psi_x(X) = F \cdot \mu_x \equiv \mathcal{X}$, évalués comme la somme des inputs.

[19] De fait, les résultats qui suivent justifieront plutôt l'utilisation de paramètres macroéconomiques qui varient dans le temps. Des restrictions de nature plus économique devraient être dérivées des interactions entre les agents, comme le fait, en physique, la loi de Boyle dans la théorie des gaz (voir May, 1947).

fonctions implicites, θ^M peut être résolu, localement, comme une fonction de $(F_t \cdot \mu_x(t), F_t \cdot \mu_y(t))$. La définition d'un agrégat de l'output "vrai", $F_t \cdot \mu_y(t)$, nous permet de décrire les solutions à (8), $\theta^M(F_t \cdot \mu_x(t), F_t \cdot \mu_y(t))$, sans faire explicitement appel aux relations microéconomiques. Cependant, à moins que les variations de l'output agrégé ne soient proportionnelles aux variations de l'output qui résultent des variations des inputs agrégés, les agrégats des inputs et de l'output varieront dans le temps et ces solutions varieront aussi dans le temps, comme Theil (1971, p. 570) l'a souligné dans un contexte linéaire. Par exemple, les changements technologiques et allocatifs impliquent que les paramètres macroéconomiques dont les microfondements sont exacts ne seront pas constants dans le temps.

Aussi l'existence de paramètres macroéconomiques d'agrégation exacte qui sont constants dans le temps nécessitera-t-elle des restrictions additionnelles. Cependant, pour assurer la stabilité de la S-variété de biais nul, on peut faire appel uniquement à des propriétés intertemporelles de la fonction macro et de l'agrégat "vrai", plutôt qu'à des restrictions au niveau microéconomique, un peu comme le théorème d'agrégation des biens composites de Hicks qui impose des restrictions intertemporelles sur les variations de prix. Ces restrictions ont l'avantage de ne nécessiter des vérifications qu'au niveau macroéconomique.

PROPRIÉTÉ 2: Si les agrégats des inputs et de l'output sont constants dans le temps, $F_t \cdot \mu_x(t) = \bar{\mu}_x$ et $F_t \cdot \mu_y(t) = \bar{\mu}_y$, pour tout $t = 1, 2, \ldots, T$, où $\bar{\mu}_x$ et $\bar{\mu}_y$ sont constants dans le temps, alors les paramètres macroéconomiques d'agrégation exacte $\theta^M(F_t \cdot \mu_x(t), F_t \cdot \mu_y(t)) \equiv \tilde{\theta}^M(\mu_x, \mu_y, F_t, t)$ seront constants dans le temps.

Preuve: Elle découle de la définition des paramètres macroéconomiques d'agrégation exacte. ◇

PROPRIÉTÉ 3:

a) Si G est homogène de degré λ_i au niveau de chacun des facteurs de production x_i

séparément, les paramètres macroéconomiques d'agrégation exacte $\theta^M(F_t \cdot \mu_x(t), F_t \cdot \mu_y(t))$ seront constants dans le temps si et seulement si les conditions de proportionalité suivantes sont satisfaites:

$$F_t \cdot (\mu_{x_1}(t), \ldots, \mu_{x_N}(t)) = (k_{1t}\bar{\mu}_{x_1}, \ldots, k_{Nt}\bar{\mu}_{x_N}) \quad et \quad F_t \cdot \mu_y(t) = \kappa_t \bar{\mu}_y,$$

$t = 1, 2, \ldots T$, où $\kappa_t = \prod_{i=1}^{N} k_{it}^{\lambda_i}$ et où $\bar{\mu}_x$ et $\bar{\mu}_y$ sont constants dans le temps.

b) Si G est homogène de degré λ au niveau des facteurs de production globalement, les paramètres macroéconomiques d'agrégation exacte $\theta^M(F_t \cdot \mu_x(t), F_t \cdot \mu_y(t))$ seront constants dans le temps si les conditions de proportionalité suivantes sont satisfaites:

$$F_t \cdot (\mu_{x_1}(t), \ldots, \mu_{x_N}(t)) = (k_t\bar{\mu}_{x_1}, \ldots, k_t\bar{\mu}_{x_N}) \quad et \quad F_t \cdot \mu_y(t) = k_t^{\lambda}\bar{\mu}_y,$$

$t = 1, 2, \ldots T$, où $\bar{\mu}_x$ et $\bar{\mu}_y$ sont constants dans le temps. (Les facteurs de production doivent tous varier dans la même proportion).

Preuve: Voir l'annexe.

Lorsqu'on est en présence de technologies à rendements constants, il suffit donc que les agrégats des inputs et de l'output varient proportionnellement dans le temps pour que les paramètres macroéconomiques soient stables. Ce résultat explique pourquoi certaines fonctions, comme la Cobb-Doublas, donnent de bonnes approximations de la relation entre la production agrégée et les quantités agrégées des facteurs de production, une conclusion que Malinvaud (1981, p.216) appuie en faisant appel aux expériences de simulations de Fisher. Lorsqu'il simulait l'agrégation de fonctions de production Cobb-Douglas, Fisher (1971) a trouvé que la fonction de production de niveau macroéconomique, où le travail est l'input variable, s'ajustait particulièrement bien aux données si la part de l'output global attribuable au travail était relativement constante dans le temps. Puisque les prédictions étudiées ont été générées à l'aide d'estimés qui imposaient des rendements constants, la propriété 3.b s'applique.

Si l'on n'exige pas que les microdéfinitions des paramètres macroéconomiques soient invariantes dans le temps, on peut trouver des solutions à la S-variété de biais nul

(8) qui sont constantes dans le temps, mais dont les microdéfinitions varient. Soit $k(t) = (k_1(t), \ldots, k_N(t))$ et $h(t)$ des fonctions de t telles que

$$F_t \cdot \mu_x(k(t)) = \bar{\mu}_x \quad \text{et} \quad F_t \cdot \mu_y(h(t)) = \bar{\mu}_y, \quad t = 1, 2, \ldots T, \tag{9}$$

alors $\theta^M(\bar{\mu}_x, \bar{\mu}_y)$ est stable dans le temps. Les déviations temporelles $k(t)$ et $h(t)$ mesurent les déviations des microdéfinitions qui assurent la stabilité des paramètres macroéconomiques.

Les paramètres macroéconomiques qui safisfont l'hypothèse d'invariance temporelle ne donneront pas nécessairement lieu à des biais d'agrégation au niveau de l'output global. Cependant leurs microfondements ne seront pas stables dans le temps et ils seront sensibles aux changements de politiques qui sont corrélés avec les variables explicatives et qui ne préservent pas la moyenne (Fortin, 1989b).

2.5. Application: l'agrégation linéaire

À la lumière du cadre conceptuel stochastique proposé, certains résultats statistiques d'agrégation linéaire établis précédemment par Theil (1954, 1971) et Zellner (1969) peuvent maintenant être interprétés facilement et généralisés au niveau de la population. Afin d'illustrer le cas le plus simple, considérons une fonction de production déterministe linéaire à deux inputs:

$$y^f = g(k^f, l^f, \alpha^f, \beta^f) = \alpha^f k^f + \beta^f l^f, \quad f = 1, 2, \ldots, F, \tag{10}$$

où y^f dénote le niveau de production, k^f et l^f représentent les niveaux de capital et de travail, α^f et β^f sont des paramètres technologiques. [20] Appelons $Y, K, L, \mathrm{A}, \mathrm{B}$ les variables aléatoires dont les réalisations sont $(y^1, \ldots, y^F)$,$(k^1, \ldots, k^F)$, $(l^1, \ldots, l^F)$, $(\alpha^1, \ldots, \alpha^F)$, $(\beta^1, \ldots, \beta^F)$, respectivement.

[20] Voir Fortin (1988) pour des exemples plus réalistes.

Dans son étude de l'agrégation linéaire, Theil (1954, 1962) s'est attardé en premier lieu au problème de l'agent représentatif moyen. Il cherchait à connaître les conditions sous lesquelles l'égalité suivante serait satisfaite:

$$\bar{y} = g(\bar{k}, \bar{l}, \bar{\alpha}, \bar{\beta}), \tag{11}$$

ce qui correspond à l'évaluation empirique de $G \equiv g$ et $\psi_z(Z) \equiv \mu_z$, dans la notation de l'équation (6). Étant donné (10), l'output agrégé moyen est [21]

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(Y) &= \mathbf{E}[G(K, L, \mathrm{A}, \mathrm{B})] = \mathbf{E}(\mathrm{A}K + \mathrm{B}L) = \mathbf{E}(\mathrm{A}K) + \mathbf{E}(\mathrm{B}L) \\ &= \mathbf{E}(\mathrm{A})\mathbf{E}(K) + \mathbf{Cov}(\mathrm{A}, K) + \mathbf{E}(\mathrm{B})\mathbf{E}(L) + \mathbf{Cov}(\mathrm{B}, L), \end{aligned} \tag{12}$$

où $\mathbf{Cov}(\mathrm{A}, K)$ est la covariance entre A et K et s'annule lorsque A et K sont distribués indépendamment. Le biais d'agrégation de la firme moyenne est donc

$$B_{\mu y} = \mathbf{Cov}(\mathrm{A}, K) + \mathbf{Cov}(\mathrm{B}, L). \tag{13}$$

Évidemment, si $\mathrm{A} = \bar{\alpha}$ et $\mathrm{B} = \bar{\beta}$ sont les mêmes pour chacune des firmes, leurs distributions seront indépendantes des variables d'input et $\mathbf{E}(\mathrm{A}) = \bar{\alpha}$, de même que $\mathbf{E}(\mathrm{B}) = \bar{\beta}$. L'output agrégé devient

$$\mathbf{E}(Y) = \mathbf{E}(\mathrm{A})\mathbf{E}(K) + \mathbf{E}(\mathrm{B})\mathbf{E}(L) = \bar{\alpha}\mathbf{E}(K) + \bar{\beta}\mathbf{E}(L), \tag{14}$$

qui s'estime sous la forme $\bar{y} = \bar{\alpha}\,\bar{k} + \bar{\beta}\,\bar{l}$ et satisfait (11). Cette condition est trivialement satisfaite si les firmes possèdent les mêmes technologies où, de façon équivalente, si les allocations du capital et du travail sont efficaces.

Une autre solution, proposée par Zellner (1969), utilise le modèle à coefficients aléatoires. Zellner suppose que les coefficients sont distribués de façon aléatoire autour d'une moyenne $\mathrm{A} = \bar{\alpha} + \delta_\alpha$ et $\mathrm{B} = \bar{\beta} + \delta_\beta$, où δ_α et δ_β sont des variables aléatoires avec $\mathbf{E}(\delta_\alpha) = \mathbf{E}(\delta_\beta) = 0$. Si on suppose que ces coefficients sont distribués indépendamment des inputs, l'output agrégé devient

$$\mathbf{E}(Y) = \mathbf{E}(\bar{\alpha} + \delta_\alpha)\mathbf{E}(K) + \mathbf{E}(\bar{\beta} + \delta_\beta)\mathbf{E}(L) = \bar{\alpha}\mathbf{E}(K) + \bar{\beta}\mathbf{E}(L), \tag{15}$$

[21] La linéarité de cette forme fonctionnelle joue un rôle crucial en permettant la séparation des inputs dans l'évaluation de cette espérance mathématique.

et conduit au résultat d'agrégation exacte de Zellner. Par contre, si on relâche cette hypothèse en supposant, par exemple que les variances des termes aléatoires dépendent de l'ordre de grandeur des facteurs de production, $\mathbf{E}[\delta_\alpha^2] = \sigma_\alpha^2\ (K)^2$ et $\mathbf{E}[\delta_\beta^2] = \sigma_\beta^2 (L)^2$, alors l'output agrégé sera

$$\mathbf{E}(Y) = \bar{\alpha}\mathbf{E}(K) + \bar{\beta}\mathbf{E}(L) + \mathbf{Cov}(\delta_\alpha, K) + \mathbf{Cov}(\delta_\beta, L) \tag{16}$$

et le biais d'agrégation ne disparaît pas.

Par la suite, Theil (1968, 1971) a étendu le modèle à coefficients aléatoires; il a développé une approche sans biais d'agrégation dite par "convergence". Si on somme (10) sur toutes les firmes et si on divise par F, on obtient:

$$\bar{y}_t = \frac{\sum_{f=1}^{F} \alpha^f k_t^f}{\sum_{f=1}^{F} k_t^f} \cdot \bar{k}_t + \frac{\sum_{f=1}^{F} \beta^f l_t^f}{\sum_{f=1}^{F} l_t^f} \cdot \bar{l}_t, \tag{17}$$

ce qui peut être interprété comme l'évaluation de

$$\mathbf{E}(Y_t) = \frac{\mathbf{E}(\mathrm{A}K_t)}{\mathbf{E}(K_t)} \cdot \mathbf{E}(K_t) + \frac{\mathbf{E}(\mathrm{B}L_t)}{\mathbf{E}(L_t)} \cdot \mathbf{E}(L_t). \tag{18}$$

Theil a démontré que si les facteurs de production sont présumés non stochastiques, (17) peut être estimée de façon convergente. Il souligne que cette hypothèse est loin d'être inoffensive (Theil, 1971, p.572), puisqu'elle implique l'indépendance stochastique entre les facteurs de production et la façon avec laquelle la production réagit à ces facteurs, nommément les coefficients. Sans cette hypothèse, les coefficients de $\bar{k}_t$ et $\bar{l}_t$ dans (17) ne sont évidemment pas constants, sauf si les facteurs de production correspondants varient proportionnellement.

Définissons les agrégats des facteurs de production comme étant les moyennes habituelles, $\psi_x(X_t) \equiv \mu_x(t)$, mais supposons que les agrégats des paramètres technologiques sont inconnus et dénotés par α_t^M et β_t^M, de telle sorte que $\psi_z(Z_t) = (\mu_k(t), \mu_l(t), \alpha_t^M, \beta_t^M)$. Si $G \equiv g$, le biais d'agrégation est donné par

$$B_{\mu y}(t) = \mathbf{E}(\mathrm{A}K_t) + \mathbf{E}(\mathrm{B}L_t) - \alpha_t^M \mu_k(t) - \beta_t^M \mu_l(t); \tag{19}$$

les paramètres macroéconomiques d'agrégation exacte appartiennent donc à la surface:

$$\mathbf{E}(K_t)\alpha_t^M + \mathbf{E}(L_t)\beta_t^M - [\mathbf{E}(\mathrm{A}K_t) + \mathbf{E}(\mathrm{B}L_t)] = 0, \tag{20}$$

pour laquelle on a la famille générale de solutions

$$\begin{aligned} \alpha_t^M &= \frac{\delta_1[\mathbf{E}(\mathrm{A}K_t)] + \delta_2[\mathbf{E}(\mathrm{B}L_t)]}{\mathbf{E}(K_t)} \\ \beta_t^M &= \frac{(1-\delta_1)[\mathbf{E}(\mathrm{A}K_t)] + (1-\delta_2)[\mathbf{E}(\mathrm{B}L_t)]}{\mathbf{E}(L_t)}, \end{aligned} \tag{21}$$

où δ_1 et δ_2 sont des scalaires. La solution proposée par Theil, $\alpha_t^M = \mathbf{E}(\mathrm{A}K_t)\ /\mathbf{E}(K_t)$ et $\beta_t^M = \mathbf{E}(\mathrm{B}L_t)/\mathbf{E}(L_t)$ correspond à $\delta_1 = 1$ et $\delta_2 = 0$. Il s'agit d'un cas particulier où les paramètres macroéconomiques ne dépendent que des caractéristiques microéconomiques correspondantes, propriété qui ne tient pas de façon générale. Les paramètres macroéconomiques α_t^M et β_t^M varieront dans le temps lorsque $\mathbf{E}(K_t)$, $\mathbf{E}(\mathrm{A}K_t)$, $\mathbf{E}(L_t)$ et $\mathbf{E}(\mathrm{B}L_t)$ varieront.

Par contre, si on suppose qu'il existe des paramètres macroéconomiques $\bar{\alpha}^M$ et $\bar{\beta}^M$ stables dans le temps, alors les coefficients $\delta_1(t)$ et $\delta_2(t)$ deviendront des fonctions du temps qui mesurent les déviations temporelles des définitions microéconomiques:

$$\begin{aligned} \bar{\alpha}^M &= \frac{\delta_1(t)[\mathbf{E}(\mathrm{A}K_t)] + \delta_2(t)[\mathbf{E}(\mathrm{B}L_t)]}{\mathbf{E}(K_t)} \\ \bar{\beta}^M &= \frac{(1-\delta_1(t))[\mathbf{E}(\mathrm{A}K_t)] + (1-\delta_2(t))[\mathbf{E}(\mathrm{B}L_t)]}{\mathbf{E}(L_t)}, \end{aligned} \tag{22}$$

pour tout $t = 1, 2, \ldots, T$.

Enfin, le présent cadre d'agrégation stochastique permet de retrouver les résultats d'agrégation "parfaite"; il suffit d'utiliser des définitions d'agrégats spécifiques à la forme fonctionnelle à agréger $\psi(Z) = (\mathbf{E}(\Theta_1 X_1), \ldots, \mathbf{E}(\Theta_N X_N), \theta_1{}^*, \ldots, \theta_N{}^*)$, tel que proposé par Nataf (1948). Choisissant les agrégats suivants,

$$k^* = \frac{1}{F\delta}\sum_{f=1}^{F}\alpha^f k^f \quad \text{et} \quad l^* = \frac{1}{F\lambda}\sum_{f=1}^{F}\beta^f l^f, \tag{23}$$

Theil (1962) a réécrit l'équation (12) comme une relation macroéconomique non biaisée,

$$\bar{y} = G(k^*, l^*, \delta^*, \lambda^*) = \delta^* k^* + \lambda^* l^*. \tag{24}$$

Cependant, comme la construction de ces agrégats nécessite une connaissance parfaite des relations microéconomiques, cette approche n'a que peu d'intérêt en pratique.

3 Analyses empiriques

Dans le paragraphe précédent, deux syndromes d'agrégation ont été identifiés; il s'agit du biais d'agrégation de l'agent représentatif moyen et de l'instabilité temporelle des paramètres macroéconomiques d'agrégation exacte. Il reste à vérifier si ces divergences sont importantes ou si elles peuvent être négligées. Les analyses empiriques suivantes explorent ces questions, bien que de façon sommaire.

Les données proviennent des tableaux d'input-output canadiens et regroupent 37 secteurs industriels, pour lesquels il a été possible de calculer des prix spécifiques à partir du rapport des valeurs en dollars courants sur les valeurs en dollars constants, ces dernières tenant lieu de quantités. Ces données sont annuelles et couvrent la période 1961-1980. Les données sur le travail étaient disponibles en tant que telles alors que celles sur le capital étaient scindées en cinq catégories: inventaires bruts et finis, matériaux-équipements, structures et terrain. Des agrégats intrasectoriels des biens capitaux ont donc été calculés à l'aide d'indices de Divisia en utilisant différentes spécifications pour décrire les anticipations des producteurs sur les prix futurs des biens dans la formule des prix de louage du capital (cas b: anticipations statiques, cas c: anticipations lissées). [22] Dans le calcul de ces derniers, il n'a pas été possible d'utiliser un taux de rendement interne; l'utilisation d'un taux d'intérêt commun ayant des conséquences désastreuses

[22] Le terme "louage" est utilisé plutôt que le terme "location", car les prix de louage sont calculés comme étant ceux que les propriétaires du capital obtiendraient s'ils louaient leurs biens plutôt que les utiliser dans la production. La formule utilisée est celle de Diewert (1980, p.471). Le cas des anticipations parfaites a aussi été examiné; cependant, il conduisait à des prix de louage erratiques et négatifs (tels que prédits par Denison, 1969, p.9.). Ceux-ci ne semblaient pas raisonnables et n'ont pas été inclus dans les analyses subséquentes. Les détails de la construction des prix de louage du capital apparaissent dans Fortin (1988).

sur les biais d'agrégation, un agrégat intrasectoriel des biens capitaux basé sur les prix du capital a aussi été inclus dans les analyses.

Dans une première série d'analyses, une fonction de production, linéaire dans le capital et le travail, a été estimée suivant le modèle:

$$y_t^f = \alpha_1^f + \alpha_k^f k_t^f + \alpha_l^f l_t^f + \epsilon_t^f, \quad t = 1, \ldots, T, \tag{25}$$

où ϵ_t^f est un terme d'erreur aléatoire de distribution normale (dans le temps) avec $\mathbf{E}(\epsilon^f) = 0$ et $\mathbf{E}(\epsilon^{f\prime}\epsilon^f) = \sigma_f^2 I$. Ces hypothèses ont été maintenues pour tous les secteurs, ensembles de données et formes fonctionnelles. [23]

Appelons Y_t, K_t, L_t, $\hat{\mathrm{A}}_1$, $\hat{\mathrm{A}}_k$, $\hat{\mathrm{A}}_l$ les variables aléatoires dont les réalisations sont $(y_t^1, \ldots, y_t^F)$, $(k_t^1, \ldots, k_t^F)$, $(l_t^1, \ldots, l_t^F)$, $(\hat{\alpha}_1^1, \ldots, \hat{\alpha}_1^F)$, $(\hat{\alpha}_k^1, \ldots, \hat{\alpha}_k^F)$ et $(\hat{\alpha}_l^1, \ldots, \hat{\alpha}_l^F)$, respectivement. Les figures 1 et 2 illustrent les densités marginales et conjointes de $\hat{\mathrm{A}}_k$ et K_t, et de $\hat{\mathrm{A}}_l$ et L_t (t=1970), pour chacun des trois ensembles de données considérés. Les densités conjointes sont représentées à l'aide d'histogrammes tri-dimensionnels. La hauteur des cubes indique le nombre de secteurs dont la valeur des paramètres et les quantités des facteurs de production se situent dans les intervalles indiqués sur les parois correspondantes. Les densités marginales sont les projections sur les plans des paramètres et des inputs des densités conjointes; elles prennent la forme d'histogrammes bi-dimensionnels contrastant l'arrière-plan quadrillé.

INSÉRER LES FIGURES 1 ET 2

L'espérance intersectorielle des estimés de (25) s'écrit

$$\mathbf{E}(Y_t) = \mathbf{E}(\hat{\mathrm{A}}_1) + \mathbf{E}(\hat{\mathrm{A}}_k K_t) + \mathbf{E}(\hat{\mathrm{A}}_l L_t) + \mathbf{E}(\epsilon_t) = \mathbf{E}(\hat{Y}_t) + \mathbf{E}(\epsilon_t), \tag{26}$$

et la fonction de production estimée de la firme moyenne est donnée par

$$\hat{Y}_t^r = \mathbf{E}(\hat{\mathrm{A}}_1) + \mathbf{E}(\hat{\mathrm{A}}_k)\mathbf{E}(K_t) + \mathbf{E}(\hat{\mathrm{A}}_l)\mathbf{E}(L_t). \tag{27}$$

[23] Ces hypothèses quoique fortes facilitent l'interprétation des biais et permettent d'examiner l'effet des divers prix de louage sur le terme d'erreur. Même si ces prix entraîneront de légères divergences par rapport à ces hypothèses, ces dernières seront maintenues afin d'obtenir la meilleure prédiction pour l'output moyen résultant d'un modèle technologique plutôt qu'autorégressif.

Le biais d'agrégation de la firme moyenne peut alors être estimé de façon équivalente par

$$B_{\mu_{\hat{y}}}(t) = \mathbf{Cov}(\hat{\mathrm{A}}_k, K_t) + \mathbf{Cov}(\hat{\mathrm{A}}_l, L_t) = \mathbf{E}(\hat{Y}_t) - \hat{Y}_t^r. \tag{28}$$

Afin de relier l'accroissement du biais de la firme moyenne à celui de la complexité de la forme fonctionnelle utilisée (*i.e.* à l'importance grandissante des moments d'ordre supérieur dans la production agrégée vraie), une autre série d'estimations a consisté à estimer un modèle quadratique:

$$y_t^f = \alpha_1^f + \alpha_k^f k_t^f + \alpha_l^f l_t^f + \alpha_{kk}^f (k_t^f)^2 + \alpha_{kl}^f k_t^f l_t^f + \alpha_{ll}^f (l_t^f)^2 + \epsilon_t^f, \quad t = 1, \ldots, T, \tag{29}$$

où ϵ_t^f est le terme d'erreur. [24]

Si on dénote par des majuscules les variables aléatoires dont les réalisations sont dénotées par des minuscules, l'output agrégé "vrai" correspondant à (29) est donné par

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(Y_t) &= \mathbf{E}(\hat{\mathrm{A}}_1) + \mathbf{E}(\hat{\mathrm{A}}_k K_t) + \mathbf{E}(\hat{\mathrm{A}}_l L_t) + \mathbf{E}(\hat{\mathrm{A}}_{kk} K_t^2) + \mathbf{E}(\hat{\mathrm{A}}_{kl} K_t L_t) \\ &\quad + \mathbf{E}(\hat{\mathrm{A}}_{ll} L_t^2) + \mathbf{E}(\epsilon_t) = \mathbf{E}(\hat{Y}_t) + \mathbf{E}(\epsilon_t), \end{aligned} \tag{30}$$

et la fonction de production estimée de la firme moyenne est

$$\begin{aligned} \hat{Y}_t^r &= \mathbf{E}(\hat{\mathrm{A}}_1) + \mathbf{E}(\hat{\mathrm{A}}_k)\mathbf{E}(K_t) + \mathbf{E}(\hat{\mathrm{A}}_l)\mathbf{E}(L_t) + \mathbf{E}(\hat{\mathrm{A}}_{kk})\mathbf{E}(K_t^2) \\ &\quad + \mathbf{E}(\hat{\mathrm{A}}_{kl})\mathbf{E}(K_t)\mathbf{E}(L_t) + \mathbf{E}(\hat{\mathrm{A}}_{ll})\mathbf{E}(L_t^2). \end{aligned} \tag{31}$$

Le biais d'agrégation de la firme moyenne se calcule comme $B_{\mu_{\hat{y}}}(t) = \mathbf{E}(\hat{Y}_t) - \hat{Y}_t^r$.

INSÉRER LE TABLEAU 1

Le tableau 1 donne les erreurs d'ajustement et les biais d'agrégation de la firme moyenne pour ces deux formes fonctionnelles et les diverses spécifications de prix de louage pour l'année 1970. Il est remarquable de constater que le biais d'agrégation de la firme moyenne est négligeable (de l'ordre de l'erreur d'ajustement) dans le premier cas

[24] Les estimés de ces paramètres ont révélé que, dans la plupart des cas, les fonctions de production étaient concaves pour les valeurs observées. Les exceptions étaient dans le cas a) les industries du tabac, de la télédiffusion et du téléphone; dans le cas b) les secteurs de l'agriculture, du tabac et du pétrole; dans le cas c) les secteurs de l'agriculture et des transports maritimes et routiers.

(a). Tel qu'illustré dans les figures 1 et 2, les covariances entre les facteurs de production et leur paramètre respectif sont plus faibles dans ce cas que dans les cas b) et c). De plus, les covariances entre $\hat{\mathrm{A}}_k$ et K_t, d'une part et entre $\hat{\mathrm{A}}_l$ et L_t d'autre part sont de direction opposée, si bien que leur somme s'annule presque. Dans les deux autres cas b) et c), où les densités conjointes sont nettement moins étalées, le biais d'agrégation de la firme moyenne est considérable. De même, tel qu'anticipé, l'ordre de grandeur de ces biais pour la fonction de production quadratique confirme que la prédiction de la firme moyenne ne conserve plus aucune correspondance avec l'agrégat vrai.

3.1. Paramètres macroéconomiques d'agrégation exacte dont les microfondements sont stables

Le deuxième problème dont l'importance ne peut être établie qu'empiriquement est celui de l'instabilité temporelle des paramètres macroéconomiques d'agrégation exacte. Ici, les paramètres macroéconomiques sont estimés au moyen d'une relation agrégée et sont ensuite reliés à leurs microfondements.

Considérons une fonction de production macroéconomique, définie comme une fonction linéaire des inputs et output moyens où les paramètres α_1^M, α_k^M et α_l^M sont invariants dans le temps

$$\mathbf{E}(Y_t) = \alpha_1^M + \alpha_k^M \mathbf{E}(K_t) + \alpha_l^M \mathbf{E}(L_t) + \epsilon_t^M. \tag{32}$$

La fonction de production macroéconomique estimée est donnée par

$$\begin{aligned} &\mathbf{E}(\hat{Y}_t) = \hat{\alpha}_1^M + \hat{\alpha}_k^M \mathbf{E}(K_t) + \hat{\alpha}_l^M \mathbf{E}(L_t) \\ \text{ou} \quad &\mathbf{E}(\hat{\mathrm{A}}_1) + \mathbf{E}(\hat{\mathrm{A}}_k K_t) + \mathbf{E}(\hat{\mathrm{A}}_l L_t) = \hat{\alpha}_1^M + \hat{\alpha}_k^M \mathbf{E}(K_t) + \hat{\alpha}_l^M \mathbf{E}(L_t), \end{aligned} \tag{33}$$

où les paramètres microéconomiques sont aussi invariants dans le temps, alors que les variables et leurs moyennes changent à chaque période. Cette dernière équation définit la variété à laquelle les paramètres macroéconomiques d'agrégation exacte doivent appartenir et impliquent que les microfondements de ces paramètres ne sont pas déterminés

de façon unique, plutôt ils sont décrits par la famille suivante:

$$
\begin{aligned}
\hat{\alpha}_1^M &= \lambda_1(t)\mathbf{E}(\hat{\mathrm{A}}_1) + \lambda_2(t)\mathbf{E}(\hat{\mathrm{A}}_k K_t) + \lambda_3(t)\mathbf{E}(\hat{\mathrm{A}}_l L_t), \\
\hat{\alpha}_k^M &= \frac{\gamma_1(t)\mathbf{E}(\hat{\mathrm{A}}_1) + \gamma_2(t)\mathbf{E}(\hat{\mathrm{A}}_k K_t) + \gamma_3(t)\mathbf{E}(\hat{\mathrm{A}}_l L_t)}{\mathbf{E}(K_t)}, \\
\hat{\alpha}_l^M &= \frac{\delta_1(t)\mathbf{E}(\hat{\mathrm{A}}_1) + \delta_2(t)\mathbf{E}(\hat{\mathrm{A}}_k K_t) + \delta_3(t)\mathbf{E}(\hat{\mathrm{A}}_l L_t)}{\mathbf{E}(L_t)},
\end{aligned}
\tag{34}
$$

où $\lambda_i(t) + \gamma_i(t) + \delta_i(t) = 1$, $i = 1,2,3$, pour tout $t = 1,2,\ldots,T$. Ici les coefficients $\lambda_i(t)$, $\gamma_i(t)$ et $\delta_i(t)$ doivent varier dans le temps afin de maintenir les paramètres macroéconomiques constants, *i.e.* que les microdéfinitions de ces paramètres varient à chaque instant. On peut obtenir une approximation de ces coefficients en faisant l'hypothèse que les microdéfinitions des paramètres macroéconomiques sont stables pour des périodes de trois ans à la fois et on peut résoudre les équations (34) pour $\lambda(t-1,t,t+1)$, $\gamma(t-1,t,t+1)$ et $\delta(t-1,t,t+1)$, à condition que la matrice-solution correspondante soit non singulière. Ces coefficients mesurent alors les déviations temporelles des microfondements. On les réinsère ensuite dans (34) pour obtenir des paramètres macroéconomiques d'agrégation exacte, $\hat{\alpha}_1^{*M}$, $\hat{\alpha}_k^{*M}$ et $\hat{\alpha}_l^{*M}$, qui varient dans le temps mais dont les microdéfinitions sont stables. [25]

INSÉRER LE TABLEAU 2

Les déviations temporelles les plus importantes sont celles qui furent induites par le choc pétrolier de 1975-76. Aussi, le tableau 2 donne-t-il les paramètres macroéconomiques, dont les microdéfinitions sont stables, calculés en utilisant les coefficients de déviations temporelles de (75-76-77). Les paramètres originaux ($\hat{\alpha}_k^M$ et $\hat{\alpha}_l^M$) se retrouvent sous les rubriques correspondantes pour la période 75-76-77 dans le tableau 2. Dans les cas a) et b), les paramètres macroéconomiques avec les microdéfinitions de 75-76-77 dévient en dehors des intervalles de confiance des paramètres originaux. À cause du lissage des anticipations, ce problème ne se retrouve pas dans le cas c).

[25] Puisque les microdéfinitions ne sont qu'approximativement les mêmes pour les trois années des périodes de base, le paramètre $\hat{\alpha}_1^{*M}$ varie même dans les périodes de base.

Lorsque des coefficients de déviations temporelles calculés à partir de périodes économiquement stables sont utilisés, les paramètres macroéconomiques d'agrégation exacte correspondants ne dévient plus en dehors de leurs intervalles de confiance. Ces analyses démontrent que les déviations temporelles des microfondements ont des effets relativement petits sur les paramètres macroéconomiques d'agrégation exacte dans plusieurs cas. Cependant, en présence de chocs (ici, le choc pétrolier), les distortions induites par les changements distributionnels sont suffisamment significatifs pour affirmer que les macromodèles estimés avant un tel changement ne pourront en prédire les effets de façon précise.

4 Conclusion

Le cadre conceptuel présenté dans cet article est inhabituel. Généralement, la stochasticité dans les modèles économiques est introduite au niveau des relations économiques qui sont vues comme incertaines. Ici, la stochasticité est utilisée pour décrire l'hétérogénéité des agents économiques. Il est alors possible de construire des modèles de type agent représentatif qui agrègent exactement les comportements d'agents totalement différents, contrairement au résultat bien connu de Gorman (1953). La condition de Gorman qui exigeait que les propensions marginales à consommer des individus soient les mêmes devient un cas particulier d'une condition plus générale qui requiert que la covariance entre le revenu et la propension marginale à consommer s'annule. [26] La diversité économique, au sens de Cournot (1838, paragraphe 21), peut alors être vue comme un ensemble de circonstances sous lesquelles les biais d'agrégation disparaissent. Au niveau empirique, on trouve effectivement un cas de firme représentative, définie comme la moyenne de firmes non identiques, qui génère un biais d'agrégation

[26] De façon plus restrictive, Malinvaud (1981, p. 75) parle d'indépendance statistique entre les caractéristiques de comportement qui expliquent les diverses propensions à consommer et le revenu.

négligeable.

Les conditions d'agrégation (Nataf, 1968, 1967) qui demandaient que les relations microéconomiques soient additivement séparables peuvent être révisées. Lorsqu'on décompose la relation agrégée exhaustive en termes de moments de la distribution des caractéristiques individuelles, on constate que les conditions de séparabilité sous-tendent l'absence de termes de covariances entre les variables impliquées. Ces conditions peuvent donc être remplacées par des conditions plus générales qui restreignent la distribution des caractérisques, mais de façon moins importante que ne le font les conditions de séparabilité; il suffit que la somme des covariances entre les variables d'intérêt s'annule. Lorsque les structures d'agrégation sont envisagées dans un cadre distributionnel, les propriétés de la distribution des caractéristiques individuelles peuvent permettre l'utilisation de formes fonctionnelles qui autrement ne seraient pas valides.

Cette méthodologie peut aussi être appliquée aux relations optimisées. Dans ce cas (Fortin, 1989a), on démontre, de façon similaire, que les conditions prescrites par les modèles antérieurs (Gorman, 1968, Blackorby et Schworm 1984, 1988) ne sont plus nécessaires pour obtenir l'agrégation exacte et que si l'on utilise des agrégats traditionnels, comme des totaux ou des moyennes, elles ne seront pas suffisantes.

La méthodologie proposée permet aussi d'établir la correspondance entre les paramètres macroéconomiques d'agrégation exacte et leurs microfondements sous la forme d'une variété qui varie dans le temps; ce qui implique que les paramètres macroéconomiques d'agrégation exacte ne possèderont des microfondements stables que sous certaines conditions. Par exemple, lorsque les rendements à l'échelle sont constants, les paramètres macroéconomiques d'agrégation exacte de la fonction Cobb-Doublas seront stables, si la part du travail dans l'output global est relativement stable, comme Fisher (1971) le constatait. De façon plus générale, à moins que les inputs ne varient dans le temps qu'en proportion avec leur productivité, l'agrégation exacte impliquera que les paramètres macroéconomiques seront instables s'ils conservent les mêmes microfondements dans le

temps. Les analyses empiriques confirment que les paramètres macroéconomiques d'agrégation exacte dont les microfondements sont stables ne fluctuent pas en dehors des intervalles de confiance des paramètres originaux lorsque les coefficients de déviations temporelles utilisés sont reliés à des périodes de stabilité économique. Cependant, en présence de chocs (ici, le choc pétrolier de 1975-76), ce résultat ne tient plus.

Les paramètres macroéconomiques des modèles d'agrégation exacte seront instables non seulement sous l'effet de chocs économiques mais aussi sous les changements de politiques qui sont corrélés avec les variables explicatives et qui ne préservent pas la moyenne. Les effets des changements de politiques sur les paramètres des modèles de type agent représentatif et sur les biais d'agrégation induits sont étudiés dans Fortin (1989b).

La méthodologie présentée ici permet de considérer le problème de l'agrégation avec plus d'optimisme que les modèles précédents. Tout d'abord, les conditions générant l'agrégation exacte ont été substantiellement élargies. Par ailleurs, lorsque ces conditions ne sont pas satisfaites, les biais d'agrégation résultant ne seront pas nécessairement importants. Le problème de l'agrégation devient une question empirique alors que la disponibilité de données microéconomiques permettant d'analyser ces biais s'accroît.

Montréal, le 15 juin 1990

Annexe

Preuve de la propriété 1 (Développement en séries du biais d'agrégation de l'output moyen)

On exprime la fonction de production g évaluée à $\tilde{z}$ en termes de son développement en séries de Taylor

$$y = g(z) = g(\tilde{z}) + (z - \tilde{z})'\nabla\tilde{g} + \tfrac{1}{2}(z - \tilde{z})'\tilde{H}(z - \tilde{z}) + \cdots, \tag{A.1}$$

où $\nabla\tilde{g}$ est le vecteur des dérivées premières de $g(z)$ et $\tilde{H}$ est la matrice hessienne, tous deux évalués à $\tilde{z}$; on suppose que la matrice des dérivées d'ordre trois est bornée.
Si on substitue (A.1) dans (1), on obtient

$$\begin{aligned} \mu_y &= \int_{\Omega_z} [g(\tilde{z}) + (z - \tilde{z})'\nabla\tilde{g} + \tfrac{1}{2}(z - \tilde{z})'\tilde{H}(z - \tilde{z}) + \cdots]\phi_Z(z)\,dz \\ &= g(\tilde{z}) + \nabla\tilde{g}\int_{\Omega_z}(z - \tilde{z})\phi_Z(z)\,dz + \tfrac{1}{2}\mathrm{tr}\tilde{H}\int_{\Omega_z}(z - \tilde{z})'(z - \tilde{z})\phi_Z(z)\,dz + \cdots, \end{aligned} \tag{A.2}$$

puisque la trace est un opérateur associatif.
Le biais d'agrégation de l'output moyen est donné par

$$B_{\mu y}(\tilde{z}) = \mu_y - g(\tilde{z}) = (\mu_z - \tilde{z})'\nabla\tilde{g} + \tfrac{1}{2}\mathrm{tr}\tilde{H}[\mathbf{E}(Z^2) - 2\tilde{z}'\mu_z + \tilde{z}'\tilde{z}] + \cdots \tag{A.3}$$

À $\tilde{z} = \psi_z(Z) = \mu_z$, le terme du premier ordre disparaît et le biais est identiquement égal à la somme des moments d'ordre supérieur. ◇

Preuve de la propriété 3 (Conditions nécessaires et suffisantes pour obtenir des paramètres macroéconomiques d'agrégation exacte stables)

a) Pour que les paramètres macroéconomiques d'agrégation exacte soient constants dans le temps, la S-variété de biais nul (8) doit donner les mêmes solutions à chacune des périodes. Utilisons deux périodes $t = 0, 1$; soient $\mu_x(0)$ et $\mu_y(0)$ les agrégats des

inputs et de l'output à la période time 0, exprimons les agrégats de la période 1 en proportion de ceux de la période 0

$$F_1 \cdot (\mu_{x_1}(1), \ldots, \mu_{x_N}(1)) = F_0 \cdot (k_{11}\mu_{x_1}(0), \ldots, k_{N1}\mu_{x_N}(0)) \tag{A.4}$$

$$\text{et} \quad F_1 \cdot \mu_y(1) = h_1 F_0 \cdot \mu_y(0). \tag{A.5}$$

En période 1, la S-variété de biais nul est décrite par

$$G\big(k_{11}F_0 \cdot \mu_{x_1}(0), \ldots, k_{N1}F_0 \cdot \mu_{x_N}(0), \theta^M\big) - h_1 F_0 \cdot \mu_y(0) = 0. \tag{A.6}$$

Puisque G est homogène de degré λ_i pour chacun des x_i, l'équation (A.6) devient

$$\kappa_1 G\big(F_0 \cdot \mu_x(0), \theta^M\big) - h_1 F_0 \cdot \mu_y(0) = 0, \tag{A.7}$$

où $\kappa_1 = \prod_{i=1}^{N} k_{i1}^{\lambda_i}$. En période 0, la S-variété de biais nul est décrite par

$$G\big(F_0 \cdot \mu_x(0), \theta^M\big) - F_0 \cdot \mu_y(0) = 0. \tag{A.8}$$

Ainsi, la S-variété de la période 1 sera identique à celle de la période 0 si et seulement si $h_1 = \kappa_1$.

b) On démontre la suffisante de ces conditions de la même manière qu'en *a)* en utilisant les proportions correspondantes entre les agrégats des périodes 0 et 1.

• Références bibliographiques

ALLEN, R.G.D. (1959) — *Mathematical Economics*, MacMillan.

BLACKORBY, C. ET W. SCHWORM (1984) — "The Structure of Economies with Aggregate Measures of Capital: A Complete Characterization," *Review of Economic Studies*, vol. 51, p.633-650.

BLACKORBY, C. ET W. SCHWORM (1988) — "The Existence of Input and Output Aggregates in Aggregate Production Functions," *Econometrica*, vol. 56, p.613-643.

BLACKORBY, C., W. SCHWORM ET T. FISHER (1986) — "Testing for the Existence of Input Aggregates in an Economy Production Function," Cahier de recherche no. 86-26, Department of Economics, University of British Columbia.

COURNOT, A. (1838) — *Recherches sur les principes mathématiques de la théorie des richesses*, Hachette.

DENISON, E.F. (1969) — "Some Major Issues in Productivity Analysis: An Examination of Estimates by Jorgenson and Griliches," *Survey of Current Business*, vol.49, p. 1-27.

DENIZOT, F.B. ET V. LÉVY-GARBOUA (1972) — "Le problème de l'agrégation," *Revue Économique*, vol. 23, p. 20-53.

DIEWERT, W.E. (1980) — "Aggregation Problems in the Measurement of Capital," dans *The Measurement of Capital*, édité par D. Usher, University of Chicago Press, p.433-538.

FISHER, F.M. (1965) — "Embodied Technical Change and the Existence of an Aggregate Capital Stock," *Review of Economic Studies*, vol. 32, p.263-288.

FISHER, F.M. (1969) — "The Existence of Aggregate Production Functions," *Econometrica*, vol. 37, p.553-577.

FISHER, F.M. (1971) — "Aggregate Production Functions and the Explanation of Wages: A Simulation Experiment," *Review of Economics and Statistics*, vol. 53, p.305-325.

FISHER, F.M. (1982) — "Aggregate Production Functions Revisited: The Mobility of Capital and the Rigidity of Thought," *Review of Economic Studies*, vol. 49, p.615-626.

FORTIN, N.M. (1988) — "Evaluating the Aggregation Biases in a Production Economy: A Stochastic Approach", University of British Columbia Ph.D. Dissertation, Vancouver, B.C.

FORTIN, N.M. (1989a) — "A Unified Theory of Aggregation: Similarity and Separability Reconsidered", Cahier de recherche no.8908, Département de Sciences économiques, Université de Montréal, mars.

FORTIN, N.M. (1989b) — "Heterogeneity Biases, Representative Agent Models and Policy Changes", Document de travail, Département de Sciences économiques, Université de Montréal, juillet.

GORMAN, W.M. (1953) — "Community Preference Fields," *Econometrica*, vol. 21, p.63-80.

GORMAN, W.M. (1968) — "Measuring the Quantities of Fixed Factors," dans *Value, Capital and Growth: Papers in Honour of Sir John Hicks*, édité par J.N. Wolfe, Edinburgh University Press, p.141-172.

GUPTA, K.L. (1971) — "Aggregation Bias in Linear Economic Models," *International Economic Review*, vol. 12, p. 293-305.

HÉNOCQ, C. ET KEMPF, H. (1984) — "Agrégation quasi parfaite par convergence," *Revue économique*, vol. 35, p.911-927.

HILDENBRAND, W. (1981) — "Short-Run Production Functions Based on Microdata," *Econometrica*, vol. 49, p.1095-1125.

HOUTHAKKER, H.S. (1955) — "The Pareto Distribution and the Cobb-Douglas Production Function in Activity Analysis," *Review of Economic Studies*, vol. 23, p. 27-31.

JENSEN, J.L.W.V. (1906) — "Sur les fonctions convexes et les inégalités entre les valeurs moyennes," *Acta Mathematica*, vol. 30, p.175-193.

JOHANSEN, L. (1972) — *Production Functions — An Integration of Micro and Macro, Short Run and Long Run Aspects*, North-Holland.

KELLER, W.J. (1980) — "Aggregation of Economic Relations: A Note," *De Economist*, vol. 128, p. 558-562.

KLEIN, L.R. (1946) — "Remarks on the Theory of Aggregation," *Econometrica*, vol.

14, p.303-312.

LEWBEL, A. (1986) — "Log-log and Log-linear Macro Models," Cahier de recherche no. 126-1986, Brandeis University.

LEWBEL, A. (1988): "Exact Aggregation, Distribution Parametrizations, and a Non-linear Representative Consumer," in *Advances in Econometrics,* VII, ed. by G.F. Rhodes and T.B. Fomby, Greenwich: JAI Press.

MALINVAUD, E. (1956) — "L'agrégation dans les modèles économiques," *Cahiers du séminaire d'économétrie*, no. 4, p.69-146.

MALINVAUD, E. (1981) — *Théorie macroéconomique - 1. comportements, croissance*, Dunod.

MARSHALL, A. (1929) — *Principles of Economics*, 8th ed., MacMillan.

MAY, K. (1947) — "Technological Change and Aggregation," *Econometrica*, vol. 15, p. 5l-63.

NATAF, A. (1948) — "Sur la possibilité de construction de certains macromodèles," *Econometrica*, vol. 16, p. 232-244.

NATAF, A. (1967) — "Possibilités d'agrégation de fonctions de production à variables capital et main-d'oeuvre," *Review of Economic Studies*, vol. 34, p. 219-226.

POKROPP, F. (1978) — "The Functional Equation of Aggregation," dans *Functional Equations in Economics*, édité par Wolfgang Eichorn, Addison-Wesley, p.122-139.

PRAKASA RAO, B.L.S. (1983) — *Nonparametric Functional Estimation*, Orlando, Fl.: Academic Press.

RICHMOND, J. (1976) — "Aggregation and Identification", *International Economic Review*, vol. 17, p.47-56.

SATO, K. (1975) — *Production Functions and Aggregation*, North-Holland.

SILVERMAN, B.W. (1986) — *Density Estimation for Statistics and Data Analysis*, London: Chapman and Hall.

STOKER, T.M. (1984) — "Completeness, Distribution Restrictions, and the Form of Aggregate Functions," *Econometrica*, vol. 52, p.887-907.

STOKER, T.M. (1986) — "Aggregation, Efficiency and Cross-Section Regression," *Eco-*

nometrica, vol. 54, p.171-188.

THEIL, H. (1954) — *Linear Aggregation of Economic Relations*, North-Holland.

THEIL, H. (1962) — "Alternatives Approaches to the Aggregation Problem", dans *Logic, Methodology and Philosophy of Science*, édité par Nagel, P. Suppes et A. Tarski, Stanford University Press. p. 507-527.

THEIL, H. (1968) — "Consistent Aggregation of Micromodels with Random Coefficients," Rapport 6816, Center for Mathematical Studies in Business and Economics, The University of Chicago.

THEIL, H. (1971) — *Principles of Econometrics*, John Wiley & Sons.

VAN DAAL, J. (1980) — "Money Illusion and Aggregation Bias," *De Economist*, vol. 128, p.86-93.

VAN DAAL, J. ET A.H.Q.M. MERKIES (1984) — *Aggregation in Economic Research: from Individual to Macro Relations*, D. Reidel.

TABLEAU 1

Biais de la firme moyenne (t=1970)

	$E(Y_t) - E(\hat{Y}_t)$	$1 - \frac{E(\hat{Y}_t)}{E(Y_t)}$	$E(\hat{Y}_t) - \hat{Y}_t^r$	$1 - \frac{\hat{Y}_t^r}{E(\hat{Y}_t)}$
1. Fonction de production linéaire dont l'input capital est construit à partir des				
a) Prix du capital	52615.5781[a]	0.020	145477.6250	0.056
b) Prix de louage avec ..... anticipations statiques	84743.3750	0.032	-435280.1250	-0.169
c) Prix de louage avec ..... anticipations lissées	-37215.0117	-0.014	-1213248.0000	-0.450
2. Fonction de production quadratique dont l'input capital est construit à partir des				
a) Prix du capital	-5067.9570	-0.002	-1961539.	-0.737
b) Prix de louage avec ..... anticipations statiques	-26192.1484	-0.010	-14696180.	-5.479
c) Prix de louage avec ..... anticipations lissées	-125342.3750	-0.047	26395152.	9.490

[a] (000 $CAN)

TABLEAU 2

Paramètres macros dont les microfondements sont stables

Coefficients de déviations temporelles (75-76-77)

Fonction de production linéaire dont l'input capital est construit à partir des

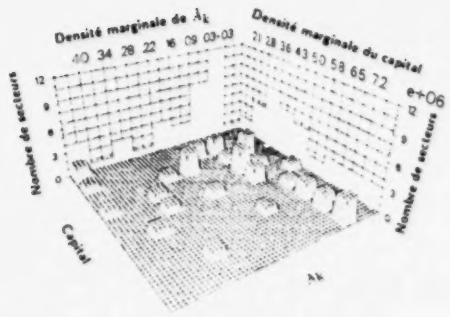
Années	$\hat{\alpha}_1^{*M}$	$\hat{\alpha}_k^{*M}$	$\hat{\alpha}_l^{*M}$
	a) Prix du capital		
1961	-7845641.	0.024368	15.5215
1962	-7520342.	0.022751	14.5652
1963	-7249876.	0.021354	13.9159
1964	-6787346.	0.019386	12.7904
1965	-6146339.	0.016863	11.3678
1966	-5681666.	0.015054	10.4967
1967	-5638895.	0.014544	10.4124
1968	-5624248.	0.014333	10.4967
1969	-5400527.	0.013491	10.0434
1970	-5512689.	0.013572	10.3179
1971	-5444699.	0.013202	10.1858
1972	-5043435.	0.012269	9.4724
1973	-4442130.	0.011160	8.4646
1974	-4024298.	0.010469	7.8063
1975	-4260461.	0.010762	8.1743
1976	-4181683.	0.010762	8.1743
1977	-4161088.	0.010762	8.1743
1978	-3789602.	0.010449	7.6578
1979	-3369891.	0.010131	7.1122
1980	-3313239.	0.010203	7.1604
	b) Prix de louage avec anticipations statiques		
1961	-6731753.	0.041961	12.9451
1962	-6531920.	0.035684	12.3611
1963	-6375397.	0.030621	11.9963
1964	-6107399.	0.022260	11.3541
1965	-5702581.	0.011085	10.4998
1966	-5426546.	0.003372	10.0204
1967	-5419978.	0.002475	9.9871
1968	-5423149.	0.001759	10.0834
1969	-5319302.	-0.000866	9.8530
1970	-5390619.	-0.000425	10.0530
1971	-5310688.	-0.001615	9.8806
1972	-5070620.	-0.005098	9.4371
1973	-4700071.	-0.009639	8.8018
1974	-4530927.	-0.010823	8.5727
1975	-4758899.	-0.008564	8.9079
1976	-4721931.	-0.008564	8.9079
1977	-4717786.	-0.008564	8.9079
1978	-4611146.	-0.009264	8.7739
1979	-4484292.	-0.009883	8.6892
1980	-4634427.	-0.009022	9.0464
	c) Prix de louage avec anticipations lissées		
1961	-4216089.	0.003750	9.0781
1962	-4244187.	0.002797	9.0510
1963	-4263961.	0.002047	9.0708
1964	-4297307.	0.000749	9.0551
1965	-4356772.	-0.000887	9.0599
1966	-4382079.	-0.002571	9.1042
1967	-4350887.	-0.003518	9.0753
1968	-4295981.	-0.004422	9.1003
1969	-4253501.	-0.005684	9.0101
1970	-4185565.	-0.006121	8.9979
1971	-4202537.	-0.006380	8.9916
1972	-4232387.	-0.006928	8.9591
1973	-4318368.	-0.007821	8.9435
1974	-4297503.	-0.008731	8.8315
1975	-4241891.	-0.008373	8.6871
1976	-4230969.	-0.008373	8.6871
1977	-4271646.	-0.008373	8.6871
1978	-4184645.	-0.008809	8.5719
1979	-3903623.	-0.009730	8.3680
1980	-3448230.	-0.010143	8.1210

FIGURE 1

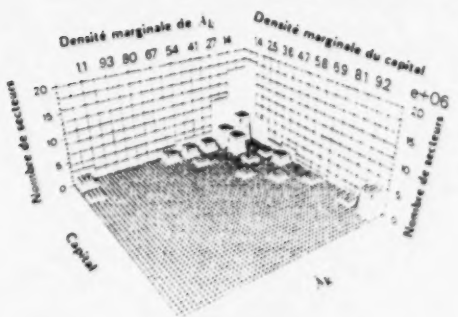
Densités conjointes de $\hat{A}_k$ et K_t (t=1970)

Fonction de production linéaire dont l'input capital est construit à partir des

a) Prix du capital



b) Prix de louage avec anticipations statiques



c) Prix de louage avec anticipations lissées

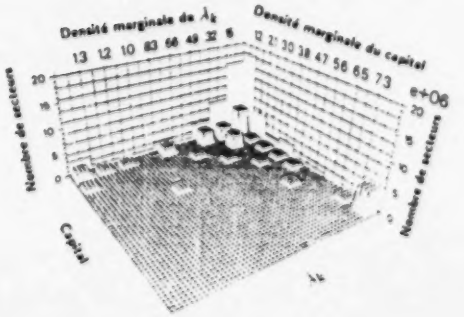
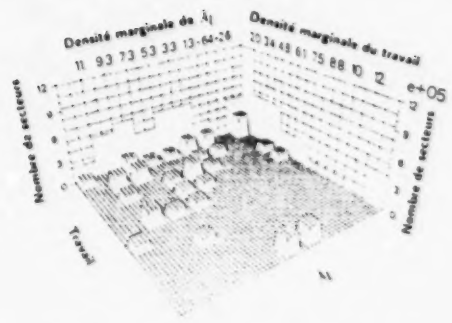


FIGURE 2

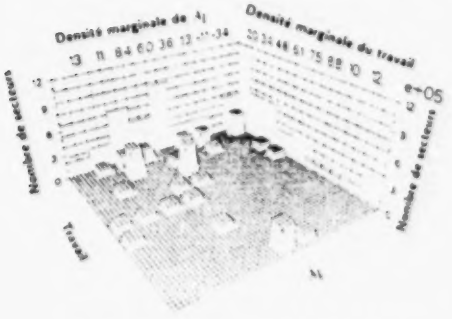
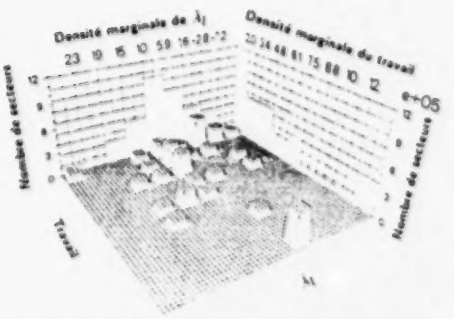
Densités conjointes de $\widehat{A}_l$ et L_t (t=1970)

Fonction de production linéaire dont l'input capital est construit à partir des

a) Prix du capital



b) Prix de louage avec anticipations statiques



c) Prix de louage avec anticipations lissées